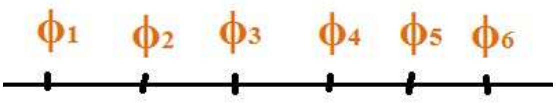
V-7 (31 min) 26-Febrero-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Cálculo de valor esperado $<\phi_a\phi_b>$ (1ª parte)**

En (IV) del resumen de V-4 definimos el valor esperado: $\langle \phi^p \rangle = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot\phi^p \cdot e^{-S(\phi)}\, d\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S(\phi)}\, d\phi \cdot}$



Campo ϕ discreto

Ahora en un campo discreto, de forma similar, definimos el valor esperado:

$$\langle \phi_a \phi_b \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_a \phi_b e^{-S(\phi_i)} \mathcal{D}\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S(\phi_i)} \mathcal{D}\phi} \qquad \text{(I)}$$

La integral del denominador la resolvimos y la tenemos en (III) del resumen de V-6.
De forma similar, aunque algo más complicada, resolveremos ahora la integral del numerador. Haremos el mismo cambio de variables:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \Rightarrow \left\} \begin{aligned} \phi_a &= v_{a1}\psi_1 + v_{a2}\psi_2 + \cdots + v_{an}\psi_n = \sum_i v_{ai}\psi_i \\ \phi_b &= v_{b1}\psi_1 + v_{b2}\psi_2 + \cdots + v_{bn}\psi_n = \sum_j v_{bj}\psi_j \end{aligned} \right.$$

Introducimos el producto $\phi_a \cdot \phi_b = \sum_{ij} v_{ai}\psi_i\, v_{bj}\psi_j$ y hacemos el cambio de variables (ya visto en video 6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_a \phi_b e^{-S(\phi_i)}\, \mathcal{D}\phi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{ij} v_{ai}\psi_i\, v_{bj}\psi_j\, e^{-\frac{m^2}{2}(\lambda_1\psi_1^2 + \lambda_2\psi_2^2 + \ldots + \lambda_n\psi_n^2)}\, \mathcal{D}\psi$$

La suma $\sum_{ij} v_{ai}\psi_i\, v_{bj}\psi_j$ tiene (n x n) sumandos, de dos tipos, por lo que la anterior integral se descompone también en (n x n) integrales sumandos de dos tipos:

1) Integrales sumandos en que i ≠ j y aparecen $\psi_i\psi_j$ (en todas las integrales los límites son -∞ y +∞)

$$\iiint v_{ai}\, v_{bj} \psi_i \psi_j\, e^{-S(\psi_i)}\, \mathcal{D}\psi = v_{ai} v_{bj} \iiint \psi_i \psi_j\, e^{-\frac{m^2\lambda_1\psi_1^2}{2}} \cdots e^{-\frac{m^2\lambda_i\psi_i^2}{2}} \cdots e^{-\frac{m^2\lambda_j\psi_j^2}{2}} \cdots e^{-\frac{m^2\lambda_n\psi_n^2}{2}}\, \mathcal{D}\psi =$$

$$= v_{ai} v_{bj} \int e^{-\frac{m^2\lambda_1\psi_1^2}{2}} d\psi_1 \cdots \int \psi_i\, e^{-\frac{m^2\lambda_i\psi_i^2}{2}} d\psi_i \cdots \int \psi_j\, e^{-\frac{m^2\lambda_j\psi_j^2}{2}} d\psi_j \cdots \int e^{-\frac{m^2\lambda_n\psi_n^2}{2}} d\psi_n = 0$$

Vimos en (V) del resumen de V-3 que $\int \psi_i\, e^{-\frac{m^2\lambda_i\psi_i^2}{2}} d\psi_i = 0$, por lo que al haber dos factores nulos, el resultado final de todas las integrales sumando, en que i ≠ j, siempre será cero.

2) Integrales sumandos en que i = j y aparecen ψ_j^2. En la suma habrá n integrales sumandos como la siguiente:

$$\iiint v_{aj}\, v_{bj}\, \psi_j^2 e^{-S(\psi_i)}\, \mathcal{D}\psi = v_{aj} v_{bj} \iiint \psi_j^2\; e^{-\frac{m^2\lambda_1\psi_1^2}{2}} \cdots e^{-\frac{m^2\lambda_j\psi_j^2}{2}} \cdots e^{-\frac{m^2\lambda_n\psi_n^2}{2}}\, \mathcal{D}\psi =$$

$$= v_{aj} v_{bj} \int e^{-\frac{m^2\lambda_1}{2}\psi_1^2} d\psi_1 \cdots \int \psi_j^2\; e^{-\frac{m^2\lambda_j}{2}\psi_j^2} d\psi_j \cdots \int e^{-\frac{m^2\lambda_n}{2}\psi_n^2}\; d\psi_n =$$

Según (I) y (II) del resumen de V3:

$$= v_{aj} v_{bj}\; \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdots\cdots\cdots \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \frac{1}{m^2} \frac{1}{\lambda_j} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdots\cdots\cdots \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = v_{aj} v_{bj} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\right)^n \frac{1}{\lambda_j} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_j \cdots \lambda_n}}$$

Al sumar las n integrales de ese tipo (para n valores de j) y sacar factor común, la integral del numerador de (I) es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_a \phi_b e^{-S(\phi_i)}\, \boldsymbol{\mathcal{D}\phi} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\right)^n \frac{1}{m^2} \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \sum_j \left(v_{aj} \cdot \frac{1}{\lambda_j} \cdot v_{bj} \right) \qquad \text{(II)}$$

Hemos tenido en cuenta lo visto en (IV) del resumen de V-2: el determinante de la matriz (A), que se diagonaliza, es igual al determinante de la matriz diagonal: ***det (A) = det (D) =*** $\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_n}$

Podemos ahora calcular el valor esperado $\langle\phi_a\phi_b\rangle$, definido en (I), dividiendo el resultado anterior (II) entre el resultado (III) del resumen de V-6:

$$\langle\boldsymbol{\phi_a\phi_b}\rangle = \frac{\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\right)^n \frac{1}{m^2}\frac{1}{\sqrt{\det(A)}}\sum_j \left(v_{aj}\cdot\frac{1}{\lambda_j}\cdot v_{bj}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}} \xrightarrow{\textit{simplificando}} \boxed{\langle\phi_a\phi_b\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m^2}}\sum_j \left(\boldsymbol{v_{aj}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda_j}}\cdot\boldsymbol{v_{bj}}\right)} \qquad \textbf{(III)}$$

El resultado anterior está expresado en función de elementos de la matriz de vectores propios (V) y sus valores propios λ_j, obtenidos al diagonalizar la matriz (A) que definía la **ACCIÓN**: $S(\phi_i) = \frac{m^2}{2}\cdot(\phi_i)^T\cdot(A)\cdot(\phi_i)$.
Se cumple que (A) = (V)·(D) ·$(V)^T$ [expresión (III) del resumen de V-2]

Conviene expresar el resultado de $\langle\phi_a\phi_b\rangle$ en función de elementos de la matriz (A):

Se puede comprobar que $\sum_j \left(v_{aj}\cdot\frac{1}{\lambda_j}\cdot v_{bj}\right) = X_{ab}$ representa el elemento X_{ab} de una matriz (X) que se obtiene con el producto:

$$(X) = (V)\cdot(D^{-1})\cdot(V)^T = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ v_{a1} & \ddots & v_{an} \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_{11} & v_{b1} & v_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{bn} & v_{nn} \end{pmatrix}$$

Comprobaremos ahora que esa matriz (X) es precisamente la inversa de la matriz (A). Para ello basta multiplicar ambas matrices y ver que el resultado es la matriz identidad. En efecto:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Según (III) del resumen de V-2:} & (A) = (V)(D)(V)^T \\ \text{Según acabamos de ver:} & (X) = (V)(D^{-1})(V)^T \end{array}\right\} \qquad (A)\cdot(X) = [(V)(D)(V)^T]\cdot[(V)(D^{-1})(V)^T]$$

(V) es matriz ortogonal y su traspuesta es igual a su inversa, según (I) del resumen de V-2: $\mathbf{(V^{-1}) = (V)^T}$

Por lo tanto, $(V)^T$ ·(V) = (Identidad). También (D)·(D^{-1}) = (Identidad) . El producto de matices (A)·(X) lo desarrollamos y queda:

$$(A)\cdot(X) = [(V)(D)(V)^T]\cdot[(V)(D^{-1})(V)^T] = (V)\cdot(D)\cdot(V)^T\cdot(V)\cdot(D^{-1})\cdot(V)^T = (Identidad)$$

Puesto que $(A)\cdot(X) = (Identidad) \implies (X) = (A^{-1})$

Concluimos que $\sum_j \left(v_{aj}\cdot\frac{1}{\lambda_j}\cdot v_{bj}\right) = X_{ab} = A^{-1}_{ab}$ es el <u>elemento *ab* de la matriz inversa de (A)</u>

$$\boxed{\langle\boldsymbol{\phi_a\phi_b}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m^2}}\boldsymbol{A^{-1}_{ab}}} \qquad \textbf{(IV)}$$